Lemme de coherence et théorème de Noether stochastique

Jacky Cresson, Sébastien Darses

Probability Theory/Dynamical Systems

Lemme de cohérence et théorème de Noether stochastique

Jacky CRESSON [a], Sébastien DARSES [b]

[a] *Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté*

[b] *Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté*

Résumé

La procédure de plongement stochastique, définie dans [3], permet d'associer à l'équation d'Euler-Lagrange classique (EL) une équation d'Euler-Lagrange stochastique (ELS). Cette dernière est-elle sous-tendue par un principe de moindre action généralisé ? Pour aborder cette question, nous développons un calcul des variations stochastique, initié par Yasue [6]. On donne un analogue stochastique naturel F de la fonctionnelle lagrangienne d'action. On introduit une notion de stationnarité pour laquelle les solutions de (ELS) sont les points stationnaires de F. La notion de stationnarité ainsi définie rend cohérent le calcul des variations stochastique vis-à-vis de la procédure de plongement stochastique. Enfin, nous démontrons un théorème de Noether stochastique qui suggère d'introduire une nouvelle notion, celle d'intégrale première stochastique.

Pour citer cet article : A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

Abstract

Coherence lemma and stochastic Noether theorem. The stochastic embedding procedure defined in [3] associates a stochastic Euler-Lagrange equation (SEL) to the standard Euler-Lagrange equation (EL). Can we derive (SEL) from a generalized least action principle? To address this question, we develop a stochastic calculus of variation initiated by Yasue [6]. We give a stochastic analog F of the lagrangian action functional. We introduce a notion of stationarity according to which the solutions of (SEL) are the stationary points of F. This notion of stationarity brings coherence to stochastic calculus of variation with respect to stochastic embedding. Finally, we prove a stochastic Noether theorem which introduces an original notion of stochastic first integral. *To cite this article: A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Email addresses: `cresson@math.univ-fcomte.fr` (Jacky CRESSON), `darses@math.univ-fcomte.fr` (Sébastien DARSES).

1. Définition d'un calcul des variations stochastique

On note $I :=]a, b[$ où $a < b$ et $J := [a, b]$ l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $d \in \mathbb{N}^*$. On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel existent une famille croissante de tribus $(\mathcal{P}_t)_{t\in J}$ et une famille décroissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in J}$.

Définition 1.1 *On note $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(J)$ l'ensemble des processus X définis sur $J \times \Omega$, à valeurs dans $\mathbb{K}^d$ et tels que : X soit $(\mathcal{P}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$ adapté, pour tout $t \in J$ $X_t \in L^2(\Omega)$, l'application $t \to X_t$ de J dans $L^2(\Omega)$ est continue, pour tout $t \in I$ les quantités $DX_t = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}E[X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{P}_t]$, et $D_*X_t = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}E[X_t - X_{t-h} \mid \mathcal{F}_t]$, existent dans $L^2(\Omega)$, et enfin les applications $t \to DX_t$ et $t \to D_*X_t$ sont continues de I dans $L^2(\Omega)$.*
Le complété de $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(J)$ pour la norme $\| X \| = \sup_{t\in I}(\| X_t \|_{L^2(\Omega)} + \| DX_t \|_{L^2(\Omega)} + \| D_*X(t) \|_{L^2(\Omega)})$, est encore noté $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(J)$, et simplement $\mathcal{C}^1(J)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}$ la dérivée stochastique introduite dans [2] et définie par $\mathcal{D} = \dfrac{D + D_*}{2} + i\dfrac{D - D_*}{2}$.

On dira qu'un lagrangien L est admissible si la fonction $L(x, v)$ est définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d$, C^1 en x et holomorphe en v, et est réelle quand v est réel. L est dit naturel s'il s'écrit $L(x, v) = q(v) - U(x)$ où q est une forme quadratique sur $\mathbb{C}^d$ et U un potentiel de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$. Soit alors la fonctionnelle associée à L définie par $F_J : \Xi \subset \mathcal{C}^1(J) \to \mathbb{C}$, $F_J(X) = E\left[\int_J L(X_t, \mathcal{D}X_t)dt\right]$ avec $\Xi = \left\{X \in \mathcal{C}^1(J), E\left[\int_J |L(X_t, \mathcal{D}X_t)|dt\right] < \infty\right\}$. On définit l'ensemble $\mathcal{L}$ des processus L-adapté $\mathcal{L} = \left\{X \in \mathcal{C}^1(J), \partial_x L(X_t, \mathcal{D}X_t) \in \mathcal{C}^1(J), \partial_v L(X_t, \mathcal{D}X_t) \in \mathcal{C}^1(J)\right\}$.

Soit Γ un sous espace de $\mathcal{C}^1(J)$. On appelle $\Gamma-$variation d'un processus $X \in \mathcal{C}^1(J)$, un processus de la forme $X+Z$ où $Z \in \Gamma$. Soit Γ_Ξ le sous-espace vectoriel de Γ défini par $\Gamma_\Xi = \{Z \in \Gamma, \forall X \in \Xi, Z + X \in \Xi\}$, et $\mathcal{N}^1(J)$ le sous-espace vectoriel $\mathcal{N}^1(J) = \{X \in \mathcal{C}^1(J), DX = D_*X\}$. Posons alors la

Définition 1.2 *Si L est un Lagrangien admissible et F_J la fonctionnelle associée, F_J est dite Γ-différentiable en un processus $X \in \Xi$ si pour tout $Z \in \Gamma_\Xi$, $F_J(X + Z) - F_J(X) = dF_J(X, Z) + R_X(Z)$, où $dF_J(X, Z)$ est une fonctionnelle linéaire en $Z \in \Gamma_\Xi$ et $R_X(Z) = o(\| Z \|)$. De plus X est dit $\Gamma-$stationnaire si pour tout $Z \in \Gamma_\Xi$, $dF_J(X, Z) = 0$.*

On considère le cas $\Gamma = \mathcal{N}^1(J)$. La $\mathcal{N}^1(J)$-différentielle de F_J est donnée par :

Lemme 1.3 *Soit L un lagrangien admissible dont toutes les différentielles secondes sont bornées. Posons $g(Z, \partial_v L)(s) = E[Z_s \partial_v L(X_s, \mathcal{D}X_s)]$. Alors $\mathcal{N}^1(I)_\Xi = \mathcal{N}^1(I)$ et la fonctionnelle F_J associée à L est $\mathcal{N}^1(I)$-différentiable en tout processus $X \in \Xi \cap \mathcal{L}$, et pour tout $Z \in \mathcal{N}^1(I)$, sa différentielle s'écrit :*

$$dF_J(X, Z) = E\left[\int_a^b (\partial_x L - \mathcal{D}\partial_v L)(X_u, \mathcal{D}X_u)Z_u du\right] + g(Z, \partial_v L)(b) - g(Z, \partial_v L)(a).$$

Démonstration. À l'aide du développement de Taylor de L, on a $L(X + Z, \mathcal{D}(X + Z)) - L(X, \mathcal{D}X) = \partial_x L(X, \mathcal{D}X)Z + \partial_v L(X, \mathcal{D}X)\mathcal{D}Z + \int_0^1 (1 - t)\left(\partial_x^2 L(T^t)Z^2 + \partial^2_{xv} L(T^t)Z\mathcal{D}Z + \partial_v^2 L(T^t)(\mathcal{D}Z)^2\right) dt$ où $T^t = (X + tZ, \mathcal{D}X + t\mathcal{D}Z)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\sup_J E[|Z\mathcal{D}Z|]$, $\sup_J E[|Z|^2]$ et $\sup_J E[|\mathcal{D}Z|^2]$ sont des $O(\|Z\|^2)$ car $Z \in \mathcal{C}^1(J)$. De plus $\partial^2_{xv}L$, $\partial^2_x L$ et $\partial^2_v L$ sont bornées et $X \in \Xi \cap \mathcal{L}$. On en déduit que $\mathcal{N}^1(I)_\Xi = \mathcal{N}^1(I)$ et $F_J(X + Z) - F_J(X) = E\left[\int_a^b (\partial_x L(X_s, \mathcal{D}X_s)Z_s + \partial_v L(X_s, \mathcal{D}X_s)\mathcal{D}Z_s)\, ds\right] + o(\|Z\|)$. On conclut en utilisant (1.4) et le fait que $Z \in \mathcal{N}^1(J)$. $\square$

Rappelons les lemmes suivants respectivement démontrés dans [2] p.42 et [2] p.70, le premier généralisant la "loi produit" donnée par Nelson dans [4] p.80, le deuxième étant l'analogue stochastique du lemme classique des "fonctions plateaux" (*cf* [1] p.57) :

Lemme 1.4 *Soit* $X, Y \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(I)$. *Alors* $E[\mathcal{D}X_t \cdot Y_t + X_t \cdot \overline{\mathcal{D}}Y_t] = \dfrac{d}{dt}E[X_t \cdot Y_t]$.

Lemme 1.5 *Soit* $Y \in \mathcal{C}^1(J)$. *Si pour tout* $Z \in \mathcal{N}^1(J)$ $\displaystyle\int_J E[Y_u \mathcal{D}Z_u]du = 0$, *alors* Y *est constant.*

Des trois lemmes on déduit le

Théorème 1.6 ($\mathcal{N}^1$-Principe de moindre action stochastique) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus* $X \in \Xi \cap \mathcal{L}$ *soit un processus* $\mathcal{N}^1(J)-$*stationnaire pour* F_J *est qu'il vérifie l'équation d'Euler-Langrange stochastique* (ELS) : $(\partial_x L - \mathcal{D}\partial_v L)(X_u, \mathcal{D}X_u) = 0$ *sur* J.

Le calcul des variations stochastiques est développé ici indépendemment de la procédure de plongement stochastique définie dans [3]. Il devient cohérent avec cette dernière pour un choix adéquat de l'espace de variation, en ce sens que :

Lemme 1.7 (Lemme de cohérence) *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
L(x(t), x'(t)) \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[d, "\bigstar"'] & L(X_t, \mathcal{D}X_t) \arrow[d, "\maltese"] \\
(EL) \arrow[r, "\mathcal{S}"'] & (ELS)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

où $\bigstar$ *symbolise l'utilisation du principe de moindre action classique à partir de la fonctionnelle* $\displaystyle\int_J L(x(t), x'(t))dt$, $\maltese$ *celle du* $\mathcal{N}^1$*-principe de moindre action stochastique à partir de* $E\left[\displaystyle\int_J L(X_t, \mathcal{D}X_t)dt\right]$ *et* $\mathcal{S}$ *la procédure de plongement stochastique définie dans [3].*

Dans [2] chap.7, on traite le cas $\Gamma = \mathcal{C}^1(J)$ et on montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $X \in \Xi \cap \mathcal{L}$ soit un processus $\mathcal{C}^1(J)-$stationaire pour F_J est qu'il vérifie l'équation : $(\partial_x L - \overline{\mathcal{D}}\partial_v L)(X_u, \mathcal{D}X_u) = 0$ sur J. Ce cas ne nous permet pas d'obtenir un lemme de cohérence mais un théorème de Noether stochastique.

2. Théorème de Noether stochastique

Les symétries apparaissant dans certains systèmes lagrangiens induisent l'existence d'intégrales premières du mouvement (*cf* [1] p.88). Une question naturelle est alors d'étudier la persistance de ces objets fondamentaux sur le système stochastisé par la procédure de plongement. Introduisons l'ensemble $\mathcal{P}$ des processus définis sur $J \times \Omega$ et l'espace $\Lambda(J)$ dont la définition est donnée dans [2] p.24. On montre suivant [5] que l'on peut calculer les dérivées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^2$ sur des éléments de cet espace (*cf* [2] p.26). On rappelle le

Théorème 2.1 *Soit* $X \in \Lambda$ *et* $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ *telle que* $\partial_t f$, ∇f *and* $\partial_{ij} f$ *sont bornées. On obtient en adoptant la convention d'Einstein sur la sommation des indices*

$$(\mathcal{D}X_t)_k = \left(b - \frac{1}{2p_t}\partial_j(a^{kj}p_t) + \frac{i}{2p_t}\partial_j(a^{kj}p_t)\right)(t, X_t), \ \mathcal{D}f(t, X_t) = \left(\partial_t f + \mathcal{D}X_t \cdot \nabla f + \frac{i}{2}a^{kj}\partial_{kj} f\right)(t, X_t). \tag{2}$$

Nous donnons les définitions nécessaires à l'établissement d'un théorème de Noether stochastique.

Définition 2.2 *Soit $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme. La suspension stochastique de ϕ est l'application $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par $\forall X \in \mathcal{P}$, $\Phi(X)_t(\omega) = \phi(X_t(\omega))$. Dans la suite on notera indifféremment le difféomorphisme et sa suspension.*
De plus un groupe à un paramètre de transformations $\Phi_s : \Upsilon \to \Upsilon$, $s \in \mathbb{R}$, où $\Upsilon \subset \mathcal{P}$, est appelé un groupe ϕ-suspendu agissant sur Υ s'il existe un groupe à un paramètre de difféomorphisme $\phi_s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $s \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$, Φ_s soit une suspension stochastique de ϕ_s, et pour tout $X \in \Upsilon$, $\Phi_s(X) \in \Upsilon$.

Définition 2.3 *Un groupe à un paramètre de difféomorphismes est dit admissible si $\Phi = \{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de C^2-diffeomorphismes sur $\mathbb{R}^d$ tel que $(s, x) \mapsto \partial_x \phi_s(x)$ est C^2 et tel que la formule (2) reste vrai pour toute fonction ϕ_s du groupe.*

La dernière condition peut paraître très restrictive, mais elle est vérifiée pour les groupes à un paramètre de difféomorphismes affines de $\mathbb{R}^d$, ce qui est important dans le cas classique ([1] p.$89 - 90$).

Lemme 2.4 *Soit $\Phi = (\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ une suspension stochastique d'un groupe admissible à un paramètre de difféomorphismes. Alors pour tout $X \in \Lambda$, et pour tout $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ l'application $s \mapsto \mathcal{D}(\Phi_s X)_t$ est de classe C^1 p.s. et $\partial_s[\mathcal{D}(\phi_s(X))] = \mathcal{D}[\partial_s \phi_s(X)]$ p.s. .*

Définition 2.5 *Soit $\Phi = (\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ ne suspension stochastique d'un groupe admissible à un paramètre de difféomorphismes et $L : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(I)$. La fonctionnelle L est invariante sous Φ si pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{C}^1(J)$, $L(\phi_s X, \mathcal{D}(\phi_s(X))) = L(X, \mathcal{D}X)$.*

Le théorème s'énonce alors :

Théorème 2.6 *Soit F_J la fonctionnelle définie sur $\Xi \cap \Lambda(J)$ par $F_J(X) = E\left[\int_J L(X_t, \mathcal{D}X_t)dt\right]$, où L est un lagrangien admissible invariant sous le groupe admissible à un paramètre de difféomorphisme $\Phi = (\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$. Soit $X^0 \in \Xi \cap \Lambda(J)$ un point $\mathcal{C}^1(J)$-stationnaire de F_J. On pose $Y_t(s) = \Phi_s(X^0)_t$. Alors $\frac{d}{dt}E\left[\partial_v L(X^0, \mathcal{D}X^0_t) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s}(0)\right] = 0.$*

Démonstration. On pose $V_t(s) = (Y_t(s), \mathcal{D}Y_t(s))$. Comme L est invariant sous $\Phi = \{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, on a $\frac{\partial}{\partial s}L(V_t(s)) = 0 \quad (p.s.)$. Comme pour tout $t \in J$ et tout $\omega \in \Omega$, $Y_t(\cdot)(\omega) \in C^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}Y_t(\cdot)(\omega) \in C^1(\mathbb{R})$, on obtient $\partial_x L(V_t(s)) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s} + \partial_v L(V_t(s)) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}Y_t}{\partial s} = 0 \quad (p.s.)$. En utilisant le lemme (2.4), cette équation est équivalente à $\partial_x L(V_t(s)) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s} + \partial_v L(V_t(s)) \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial s}\right) = 0 \quad (p.s.)$. Comme $X^0 = Y(0)$ est un $\mathcal{C}^1(J)-$point stationaire de F_J, on a $\partial_x L(V_t(0)) = \overline{\mathcal{D}}[\partial_v L(V_t(0))]$. On en déduit alors $\overline{\mathcal{D}}[\partial_v L(V_t(0))] \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s}(0) + \partial_v L(V_t(0)) \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial s}(0)\right) = 0 \quad (p.s.)$. D'où $E\left[\overline{\mathcal{D}}[\partial_v L(V_t(0))] \cdot \frac{\partial Y}{\partial s}(0) + \partial_v L(V_t(0)) \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial s}(0)\right)\right] = 0.$
Avec le lemme (1.4), il vient $\frac{d}{dt}E\left[\partial_v L(V_t(0)) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s}(0)\right] = 0.$ □

Ce théorème suggère d'introduire la notion suivante d'intégrale première :

Définition 2.7 *Soit L un lagrangien admissible. Une fonctionnelle $I : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une intégrale première pour l'équation d' Euler-Lagrange stochastisée associée à L si $\frac{d}{dt}[I(X_t)] = 0$, pour tout X satisfaisant une équation d'Euler-Lagrange stochastique.*

Références

[1] Arnold V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2d edition, Springer, 1989.

[2] Cresson J., Darses S., Stochastic embedding of dynamical systems, arXiv : math.PR/0509713, 112.p, 2005.

[3] Cresson J., Darses S., Plongement stochastique des systèmes lagangiens, 4.p, 2005.

[4] Nelson E., *Dynamical theories of Brownian motion*, second edition, Princeton, 2001.

[5] Thieullen M., Second order stochastic differential equations and non-Gaussian reciprocal diffusions, Proba. Theory and Rel. Fields 97, 231-257 (1993).

[6] Yasue K, Stochastic calculus of variations, Journal of functional Analysis 41, 327-340 (1981).